

# Le direzioni della ricerca logica in Italia 2

*A cura di*

Hykel Hosni, Gabriele Lolli, Carlo Toffalori



Edizioni ETS



[www.edizioniets.com](http://www.edizioniets.com)

© Copyright 2018

Edizioni ETS

Piazza Carrara, 16-19, I-56126 Pisa

[info@edizioniets.com](mailto:info@edizioniets.com)

[www.edizioniets.com](http://www.edizioniets.com)

*Distribuzione*

Messaggerie Libri SPA

Sede legale: via G. Verdi 8 - 20090 Assago (MI)

*Promozione*

PDE PROMOZIONE SRL

via Zago 2/2 - 40128 Bologna

ISBN 978-884675298-7

# Indice

Introduzione <i>Hykel Hosni, Gabriele Lolli, Carlo Toffalori</i>	<b>xi</b>
Le direzioni della ricerca logica in Italia: la logica lineare e i suoi sviluppi <i>Vito Michele Abrusci, Paolo Pistone</i>	<b>1</b>
Verifica automatica e dimostrazione interattiva <i>Andrea Asperti</i>	<b>49</b>
Deduzione automatica <i>Maria Paola Bonacina</i>	<b>77</b>
Model checking: teoria ed applicazioni <i>Alessandro Cimatti, Silvio Ghilardi, Silvio Ranise</i>	<b>141</b>
Le direzioni della logica in Italia: la teoria (classica) della computabilità <i>Patrizio Cintioli, Luca San Mauro, Andrea Sorbi</i>	<b>195</b>
Le direzioni della logica in Italia: metodi e modelli nonstandard <i>Mauro Di Nasso, Marco Forti</i>	<b>235</b>
Le direzioni della logica in Italia: la reverse mathematics e l'analisi computazionale <i>Guido Gherardi, Alberto Marcone</i>	<b>295</b>
La teoria dei tipi <i>Maria Emilia Maietti</i>	<b>333</b>
Le direzioni della ricerca logica in Italia: teoria delle categorie e logica categoriale <i>Giuseppe Rosolini</i>	<b>365</b>



# Le direzioni della logica in Italia: Introduzione

L'età della logica supera i due millenni. Tanto è passato dai tempi in cui gli Stoici e Aristotele presero a svilupparla, quest'ultimo intendendola come la base di ogni scienza, perché arte di argomentare, provare, convincere. La logica degli ultimi secoli, da Leibniz e Boole in poi, ha stretto progressivamente un legame privilegiato con la matematica, pur mantenendo il rapporto con la filosofia. Quella degli ultimi decenni si è coniugata felicemente con l'informatica, cui del resto ha dato l'avvio, grazie a Turing (e non solo). Oggi la logica interviene in modo fruttuoso nello studio dei linguaggi, nelle scienze sociali, ancora nella didattica, e in molto altro.

Questa varietà di spunti, interazioni e applicazioni ha già ispirato il volume [1] da noi curato, che ha presentato un'ampia panoramica della ricerca logica in Italia in vari rami – passato, presente e futuro, come dire le radici storiche, gli studi in atto e le prospettive avvenirizie. Ampia ma non esaustiva; ricca di suggestioni, ma non immune da omissioni. Un quadro completo era del resto impensabile, e sotto certi aspetti avrebbe contraddetto lo spirito stesso del volume, che intendeva essere aperto, dinamico, rivolto appunto al futuro. È allora giusto che un secondo libro intervenga, ad allargare e aggiornare ulteriormente l'analisi della ricerca logica in Italia.

Gli argomenti di questo nuovo volume, non trattati nel precedente, includono temi classici ma tuttora vitali di logica, come la teoria della ricorsività, metodi e modelli non standard, la teoria dei tipi e la teoria delle categorie. Tra l'altro, recenti varianti del primo di questi temi si collegano all'analisi computazionale e al programma di Reverse Mathematics. La logica lineare è filone relativamente più giovane, dunque fresco e attuale nella ricerca anche italiana. Concludono la raccolta dei vari interventi temi di applicazione all'informatica, come deduzione automatica, verifica automatica e finalmente model checking.

Confidiamo che il nostro sia un contributo proficuo per la comunità logica italiana, soprattutto per i più giovani. Ci rammarichiamo se, nonostante i nostri sforzi, qualche argomento rimane ancora sacrificato. Ma anche eventuali omissioni confermano la vivezza e l'ampiezza della ricerca logica in Italia.

Ringraziamo gli autori che hanno collaborato a questo volume con disponibilità e competenza. Ringraziamo l'AILA (Associazione Italiana di Logica e sue Applicazioni) e in particolare il dr. Patrizio Cintioli per il loro generoso sostegno. I vari interventi di questo libro sono stati presentati in anteprima il

28 settembre 2017, nella giornata finale del XXVI Incontro AILA, svoltosi a Padova.

### **Bibliografia**

- [1] H. HOSNI, G. LOLLI, C. TOFFALORI (a cura di), *Le direzioni della ricerca logica in Italia*, Edizioni della Normale, Pisa (2015).

Hykel Hosni è professore associato di Logica e filosofia della scienza presso l'Università degli Studi di Milano.  
hykel.hosni@unimi.it

Gabriele Lolli è stato professore di Filosofia della Matematica presso la Scuola Normale Superiore di Pisa.  
gabrielelolli42@gmail.com

Carlo Toffalori è professore di Logica Matematica presso l'Università di Camerino.  
carlo.toffalori@unicam.it

# Le direzioni della ricerca logica in Italia: la logica lineare e i suoi sviluppi

Vito Michele Abrusci, Paolo Pistone

## Sommario

L'articolo espone sinteticamente i principali temi della ricerca in logica lineare, una delle direzioni di ricerca in logica attive in Italia negli ultimi trenta anni. Nell'introduzione vengono brevemente richiamate le caratteristiche generali della logica lineare. Nelle successive sezioni vengono illustrati gli ambiti della ricerca internazionale in logica lineare ai quali ricercatori italiani hanno fornito il loro contributo. L'ampia bibliografia raccoglie alcune delle piú significative pubblicazioni internazionali sulla logica lineare, con particolare attenzione ai contributi dei ricercatori italiani.

## 1 Introduzione

Un ampio campo di ricerca è stato aperto nel 1987 da Jean-Yves Girard ([129])<sup>1</sup> con l'introduzione della logica lineare. Questa si è presentata come una *nuova logica costruttiva e sensibile alle risorse*, nella quale è possibile fornire una *rappresentazione geometrica* delle dimostrazioni, e ha riscosso da subito un grande interesse da parte dei ricercatori per le sue innovazioni teoriche e per le sue applicazioni.

Una logica *costruttiva* è una logica dotata non solo e non tanto della usuale semantica delle formule (ossia una semantica che permette di dare significato alle formule, e indagare il rapporto tra dimostrabilità e verità) ma soprattutto di una semantica delle dimostrazioni (ossia una semantica che permette di dare significato alle dimostrazioni, e indagare sulla permanenza del significato quando una dimostrazione si trasforma in un'altra) nella quale – a differenza della logica classica – non tutte le dimostrazioni di una stessa formula ricevano lo stesso significato. Il piú classico esempio di logica costruttiva è

---

<sup>1</sup> Per un'introduzione alla logica lineare e ai suoi principali sviluppi sino al 2006 si segnalano i volumi di Girard [145, 146], tradotti in inglese in [147].

# Verifica automatica e dimostrazione interattiva

*Andrea Asperti*

## Sommario

Il settore della verifica automatica si occupa della elaborazione e validazione mediante elaboratori elettronici di certificati di correttezza. Gli strumenti in oggetto, chiamati abitualmente *proof assistants* o *interactive provers*, forniscono un ambiente interattivo per la costruzione di certificati formali la cui correttezza può essere determinata in modo completamente automatico. Questi strumenti hanno applicazioni sia in campo matematico, dove i certificati sono prove di teoremi, sia in campo informatico, dove i certificati argomentano la correttezza di un determinato software rispetto ad una sua specifica.

## 1 Introduzione

Esiste un interessante sito web<sup>1</sup> curato da G.J.Woeginger che raccoglie oltre un centinaio di contributi di autori che asseriscono di risolvere *in un senso o nell'altro* (!) il problema dell'uguaglianza tra le classi di complessità  $P$  e  $NP$ . Come è noto questo è uno dei cosiddetti problemi del Millennio: non ci si aspetta che ammetta una soluzione semplice e verificarne la correttezza può essere difficile e dispendioso. Nessuno dei lavori contenuti nella lista di Woeginger è stato pubblicato su riviste peer reviewed e/o di elevata reputazione scientifica. Tuttavia, gli autori non sono degli sprovveduti, ma ricercatori di notevole esperienza, e frequentemente docenti universitari della materia in oggetto o di settori affini.

Sarebbe bello poter disporre di uno strumento automatico a cui dare in pasto questi articoli, e che rispondesse asserendo la correttezza o meno delle argomentazioni addotte. Questo è profondamente diverso dal cercare di *dimostrare automaticamente* l'uguaglianza  $P = NP$ . Se abbiamo un sistema logico con un minimo di espressività la *ricerca* di una dimostrazione non è un

---

<sup>1</sup> <https://www.win.tue.nl/~gwoegi/P-versus-NP.htm>



# Deduzione automatica

Maria Paola Bonacina

## Sommario

La deduzione automatica comprende la *dimostrazione automatica di teoremi*, per trovare prove di congetture, e la *costruzione automatica di modelli*, per trovare soluzioni di insiemi di vincoli. In deduzione automatica, la difficoltà del problema è spesso direttamente proporzionale all'espressività del linguaggio logico. La procedura di *Apprendimento di Clausole Guidato da Conflitti*, dall'inglese "Conflict-Driven Clause Learning" (CDCL), è una componente centrale dei sistemi per decidere la *soddisfacibilità in logica proposizionale*. Questa procedura limita le inferenze a quelle necessarie per *spiegare* i conflitti, e usa i conflitti per tagliare lo spazio di ricerca. Le attuali direzioni di ricerca in deduzione automatica vedono una convergenza verso l'obiettivo di generalizzare questa nozione di *soddisfacibilità guidata da conflitti* dalla logica proposizionale alla logica del primo ordine, realizzando un paradigma di *deduzione guidata da conflitti*. Alcune direzioni di questo tipo si applicano al problema della *soddisfacibilità modulo teorie* in frammenti decidibili di teorie assiomatizzate in logica del primo ordine. In questo ambito la deduzione guidata da conflitti permette perfino una generalizzazione della classe dei problemi considerati da *soddisfacibilità modulo teorie* a *soddisfacibilità modulo teorie e assegnamenti*. Sviluppi non meno sorprendenti vedono l'applicazione della deduzione guidata da conflitti alla *dimostrazione automatica di teoremi in logica del primo ordine*. Queste direzioni di ricerca sono tanto promettenti quanto foriere di sfide entusiasmanti.

## 1 Introduzione

La forma tipica dei problemi in deduzione automatica è quella del problema di *validità*, dove ci si chiede se una congettura  $\varphi$  sia conseguenza logica di un insieme  $H$  di assunzioni. Poichè i metodi automatici lavorano preferibilmente in modo refutazionale, un problema di validità viene solitamente riformulato in *forma refutazionale*, chiedendosi se  $H \cup \{\neg\varphi\}$  sia *insoddisfacibile*. Assunzioni,

# Model checking: teoria ed applicazioni

*Alessandro Cimatti, Silvio Ghilardi, Silvio Ranise*

## Sommario

Il model checking è una tecnica algoritmica per la verifica di proprietà temporali di sistemi dinamici, introdotto nella prima parte degli anni '80. Le tecniche iniziali di model checking a stati finiti, basate sull'esplorazione esplicita dello spazio degli stati, sono state progressivamente sostituite, nel corso degli anni, da tecniche simboliche, ovvero basate su Diagrammi di Decisione Binaria (BDD), e sistemi per la soddisfacibilità proposizionale (SAT solvers). Ulteriori sviluppi nel model checking, orientati all'analisi di sistemi a stati infiniti, derivano dalla applicazione di tecniche per la soddisfacibilità modulo teorie (SMT). Si tratta di procedure di decisione per frammenti della logica del primo ordine, che possono essere viste come una integrazione di SAT con tecniche per la risoluzione di vincoli.

Il model checking è applicato in molti ambiti a supporto della progettazione, debugging e certificazione di sistemi a stati finiti e infiniti. Obiettivo di questo lavoro è fornire una introduzione alla teoria del model checking, ed una panoramica delle sue applicazioni in vari ambiti della sicurezza.

## 1 Introduzione

### Radici del model checking

Il model checking trae origine da lavori fondazionali sulla logica modale. In particolare, alcune logiche modali, note come logiche temporali, sono state riconosciute come adeguate per la formalizzazione di comportamenti di sistemi dinamici [112]. Tali logiche vengono interpretate su strutture di Kripke, in cui è possibile modellare l'evoluzione dello stato di un sistema dinamico.

Il model checking viene introdotto negli articoli seminali di Clarke ed Emerson [80, 62, 63] e di Quielle e Sifakis [114]. L'intuizione di base è che il model checking consente di affrontare un problema fondamentale della verifica dei sistemi complessi, ovvero la verifica funzionale. La domanda, a livello informale, è se il sistema soddisfa i requisiti. Questa viene ridotta,

# Le direzioni della logica in Italia: la teoria (classica) della computabilità

*Patrizio Cintioli, Luca San Mauro, Andrea Sorbi*

## Sommario

Questo articolo si propone di descrivere alcune delle direzioni della ricerca in teoria della computabilità in Italia, che riguardano principalmente riducibilità e gradi, strutture presentate effettivamente, computabilità nel limite. Pur senza trascurare lavori e contributi degli anni Ottanta e Novanta, ci concentreremo soprattutto sui risultati conseguiti negli ultimi anni.

## 1 Introduzione

La computabilità in Italia si è a lungo identificata con la figura di Piergiorgio Odifreddi. I suoi due monumentali volumi *Classical Recursion Theory* sono ancora oggi uno strumento indispensabile e di esemplare chiarezza non solo per gli specialisti ma per i logici in generale. La computabilità classica si occupa principalmente dei modelli di computabilità relativa (riducibilità ricorsive e strutture di gradi) e della connaturata interconnessione tra definibilità e computabilità (gerarchie, linguaggi formali, insiemi computabilmente enumerabili). Odifreddi ha dato notevoli contributi di ricerca a tali tematiche. Basterà ricordare i suoi articoli su: riducibilità “forti” [90, 95]; forcing e riducibilità ricorsive [91, 92, 93]; proprietà globali dei gradi aritmetici [94], dei gradi di Turing in generale, e dei gradi di insiemi definibili nell’aritmetica del primo ordine [96]. Di riducibilità e di modelli di computabilità relativa si sono occupati tra gli altri anche Paolo Casalegno (con le sue ricerche sui gradi delle funzioni parziali [31]) e gli autori del presente articolo, che ha lo scopo di passare in rassegna alcuni dei principali contributi dei ricercatori italiani alla teoria della computabilità. La rassegna inizia con i risultati sulle riducibilità, in particolare le cosiddette riducibilità positive; si analizzano poi i contributi alla teoria delle numerazioni ed alle sue applicazioni a famiglie di insiemi nella gerarchia aritmetica e nella gerarchia di Ershov; si prosegue quindi con la riducibilità computabile tra relazioni

# Le direzioni della logica in Italia: metodi e modelli nonstandard

*Mauro Di Nasso, Marco Forti*

## Sommario

Presentiamo una breve esposizione dello stato attuale della ricerca in Italia nell'ambito dei metodi e dei modelli nonstandard. In particolare, illustreremo le ricerche attualmente in corso relative alle applicazioni in teoria combinatoria dei numeri e in teoria di Ramsey. Inoltre faremo il punto sugli studi di "teorie euclidee" della numerosità, cioè teorie che raffinano la nozione Cantoriana di cardinalità in modo da permettere di mantenere tutte e cinque le nozioni comuni degli *Elementi* di Euclide, che costituiscono la base del concetto generale di *magnitudo*.

## 1 Introduzione

La giornata conclusiva del XXVI incontro di Logica dell'AILA, tenutosi a Padova dal 25 al 28 Settembre 2017, è stata dedicata a brevi esposizioni delle ricerche logiche in Italia. In tale occasione gli autori hanno delineato le attuali ricerche che utilizzano metodi e modelli nonstandard. In questo capitolo esponiamo i principali elementi delle ricerche correnti in cui sono coinvolti gli autori. Menzioneremo solo mediante riferimenti bibliografici altre ricerche italiane di questo settore, di cui siamo a conoscenza, ma che non possiamo trattare con la dovuta accuratezza.

Modelli nonstandard dell'aritmetica furono considerati da Thoralf Skolem negli anni '20 del Novecento, ma uno studio sistematico iniziò solo negli anni '50 con la nascita della moderna teoria dei modelli. *L'analisi nonstandard* nacque pochi anni dopo con Abraham Robinson (cfr. [41]). Usando le tecniche della teoria dei modelli, Robinson riuscì a trattare in modo matematicamente soddisfacente l'analisi infinitesimale, ponendola su basi fondazionali rigorose.

Da allora si considerano modelli nonstandard dei numeri reali che sono speciali campi reali non archimedei verificanti un principio di *transfer* alla Leibniz, che garantisce la preservazione delle proprietà "elementari" dei numeri reali. In tali campi esistono numeri infinitesimi ed infiniti, che si comportano in

# Le direzioni della logica in Italia: la reverse mathematics e l'analisi computazionale

*Guido Gherardi, Alberto Marcone*

## Sommario

In questo articolo presentiamo la reverse mathematics e l'analisi computazionale, evidenziando i contributi dei logici italiani al loro progresso. La parte dell'analisi computazionale che studia il reticolo di Weihrauch condivide con la reverse mathematics l'obiettivo di classificare i teoremi matematici secondo il loro grado di complessità logico-computazionale. Per questa ragione, e anche grazie al contributo dei ricercatori italiani, nell'ultimo decennio questi due programmi di ricerca sono venuti sempre più in contatto.

## 1 Introduzione

Nelle conversazioni tra matematici non è infrequente sentire affermazioni del tipo “i teoremi  $\Phi$  e  $\Psi$  sono equivalenti”, oppure “il teorema  $\Phi$  è più forte del teorema  $\Psi$ ”. Dato che  $\Phi$  e  $\Psi$  (essendo teoremi) sono entrambi dimostrabili, prendendo alla lettera le due affermazioni abbiamo che la prima è banalmente vera e la seconda banalmente falsa. Sappiamo tutti però che queste affermazioni hanno un altro significato, molto meno banale, e c'è quindi una ragione per cui vengono fatte. Per fissare le idee consideriamo un'affermazione del secondo tipo: essa significa che a partire da  $\Phi$  si può dedurre facilmente (assumendo certe competenze in una certa parte di matematica)  $\Psi$ , mentre non sappiamo come dimostrare altrettanto facilmente  $\Phi$  a partire da  $\Psi$ , e anzi qualunque dimostrazione di  $\Phi$  non usa per nulla  $\Psi$ . Queste affermazioni sono dunque certamente dipendenti dal momento storico in cui sono fatte (si può trovare una nuova dimostrazione, e ciò che è considerato difficile oggi potrebbe essere un esercizio di routine tra un secolo). Parrebbe dunque che asserzioni di questo tipo non siano suscettibili di un'analisi matematicamente rigorosa.

# La teoria dei tipi

*Maria Emilia Maietti*

## Sommario

Dopo una breve descrizione dei concetti fondamentali caratterizzanti la Teoria dei Tipi per i fondamenti della Matematica, vengono esposti alcuni rilevanti contributi italiani di particolare interesse per i fondamenti della Matematica Costruttiva.

## 1 Introduzione

La teoria dei tipi odierna è una branca sia della matematica che dell'informatica. In Italia è studiata sia da gruppi di informatici, per esempio quelli presso l'Università di Torino (si veda [14]) e presso l'Università di Bologna (si veda la sezione di Andrea Asperti in questo volume), che da gruppi di matematici come quello dei logici dell'Università di Padova di cui faccio parte.

Il principale oggetto di studio della teoria dei tipi sono i sistemi formali che classificano gli enti matematici tramite i “*tipi*” e i loro elementi detti “*termini*”.

La teoria dei tipi è stata originariamente introdotta da Bertrand Russell nei primi del Novecento come fondamento affidabile della matematica di fronte alla contraddittorietà da lui notata di alcune formulazioni insiemistiche (rimandiamo il lettore a [16] per un approfondimento delle sue origini).

## 2 Proprietà distintive della teoria dei tipi

Sottolineiamo di seguito alcune caratteristiche che distinguono la teoria dei tipi dalle teorie degli insiemi assiomatiche nello stile di quella di Zermelo-Fraenkel.

**Distinzione tra tipi e loro elementi.** La principale novità della teoria dei tipi rispetto alle teorie degli insiemi assiomatiche alla Zermelo-Fraenkel, incluse quelle in versione costruttiva descritte in [18], è che mentre in queste ultime sia gli enti matematici che i loro elementi sono indistintamente insiemi (per esempio il numero “3” è un insieme tanto quanto l'insieme dei numeri naturali), in teoria dei tipi gli elementi dei tipi non sono generalmente a loro volta

# Le direzioni della ricerca logica in Italia: teoria delle categorie e logica categoriale

*Giuseppe Rosolini*

## Sommario

La logica categoriale è una branca abbastanza giovane della logica matematica, ma le categorie sono ovunque in logica quando si nota che le strutture preordinate sono esattamente determinate come quelle categorie tali che tra ogni coppia di oggetti c'è *al massimo* una freccia. Gli sviluppi recenti della ricerca in Italia in teoria delle categorie e in logica categoriale sono molteplici, dalle categorie di omotopia alle categorie algebriche, dalle applicazioni alla teoria della dimostrazione a quelle in matematica costruttiva, dai topos alla semantica dei linguaggi di programmazione.

## 1 Introduzione

La logica categoriale, cioè lo studio della logica secondo i paradigmi dettati dalla teoria delle categorie, è una branca abbastanza giovane della logica matematica, ma sin dalle prime proposte di A. Grothendieck, J. Benabou e F.W. Lawvere trovò riscontri interessanti in Italia quali Roberto Magari a Siena, Mario Servi a Parma, Renato Betti, Aurelio Carboni, Massimo Galuzzi, Giancarlo Meloni a Milano, Gabriele Lolli a Torino, oltre che a Lawvere stesso a Perugia per alcuni anni.

L'incessante sviluppo dell'astrazione matematica nella prima parte del XX secolo – in particolare in topologia algebrica – aveva condotto due matematici americani, Samuel Eilenberg e Saunders Mac Lane, a introdurre il concetto di categoria nell'articolo “General Theory of Natural Equivalences”, apparso nel 1945 sul volume 58 delle *Transactions of the American Mathematical Society*. Dichiaratamente sia nel titolo che nel testo, il concetto rilevante introdotto è quello di “equivalenza naturale”, e più in generale di “trasformazione naturale”, si veda [10], p. 18<sup>1</sup>.

---

<sup>1</sup> Il testo è pubblicato in italiano in [11].

Edizioni ETS  
Piazza Carrara, 16-19, I-56126 Pisa  
info@edizioniets.com - www.edizioniets.com  
Finito di stampare nel mese di giugno 2018