

An Analytical Formulation for the Kinematic Interaction Analysis of Inclined Single Piles

Sandro Carbonari^a, Michele Morici^b, Francesca Dezi^c, Graziano Leoni^b

^a *Dipartimento di Ingegneria Civile, Edile e Architettura, Via Breccie Bianche, 60131 Ancona.*

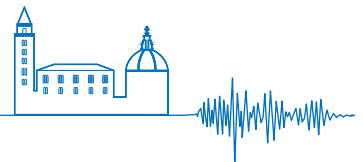
^b *Scuola di Ateneo di Architettura e Design, Viale della Rimembranza, 63100 Ascoli Piceno.*

^c *Dipartimento di Economia, Scienze e Diritto, Via Salita alla Rocca 44, 47890 San Marino, Repubblica di San Marino.*

Analytical model, inclined piles, pile kinematic stress resultants, soil-pile interaction, seismic response.

ABSTRACT

This paper presents an analytical model, based on the beam-on-dynamic Winkler foundation approach, for the evaluation of the kinematic stress resultants in single inclined piles subjected to the propagation of seismic waves. The Euler-Bernoulli beam model is adopted for the pile whereas analytical solutions available in literature for viscoelastic layers undergoing harmonic vibrations of a rigid disk are used for the soil. The coupled flexural and axial behaviour of the pile is governed by a system of differential equations, with the relevant boundary conditions, that is solved analytically in terms of exponential matrices. The solution for piles embedded in a homogeneous soil deposit is presented. Some applications, including comparisons of results with those obtained from rigorous boundary element formulations, demonstrate that the model, characterised by a very low computational effort, is able to accurately predict stress resultants in inclined piles subjected to seismic loading.



Un modello analitico per l'interazione cinematica di pali singoli inclinati

Sandro Carbonari^a, Michele Morici^b, Francesca Dezi^c, Graziano Leoni^b

^a Dipartimento di Ingegneria Civile, Edile e Architettura, Via Breccie Bianche, 60131 Ancona.

^b Scuola di Ateneo di Architettura e Design, Viale della Rimembranza, 63100 Ascoli Piceno.

^c Dipartimento di Economia, Scienze e Diritto, Via Salita alla Rocca 44, 47890 San Marino, Repubblica di San Marino.

Keywords: Modello analitico, pali inclinati, sollecitazioni cinematiche, interazione palo-terreno, risposta sismica.

ABSTRACT

Questo lavoro presenta un modello analitico, basato sull'approccio di trave su suolo alla Winkler di tipo dinamico, per la valutazione delle sollecitazioni cinematiche in pali singoli inclinati dovute alla propagazione di onde sismiche nel terreno. I pali sono modellati con elementi trave di Eulero-Bernoulli e l'interazione con il terreno è colta sfruttando soluzioni analitiche disponibili in letteratura relative a strati di materiale viscoelastico soggetti a vibrazioni armoniche di dischi rigidi. Il comportamento accoppiato assiale e flessionale del palo è governato da un sistema di equazioni differenziali alle derivate totali, con le relative condizioni al contorno, che è risolto, con riferimento al caso del palo infisso in un deposito di terreno omogeneo, sfruttando le matrici esponenziali. Alcune applicazioni dimostrano, dal confronto dei risultati con quelli ottenuti da formulazioni rigorose agli elementi di contorno, che il modello proposto, caratterizzato da un basso onere computazionale, è capace di predire in modo accurato le sollecitazioni che si sviluppano in pali inclinati soggetti ad azioni sismiche.

1 INTRODUZIONE

L'approccio di trave su suolo elastico alla Winkler in ambito dinamico è stato largamente usato in letteratura per studiare il problema di un palo singolo soggetto ad azioni sismiche. Secondo questo approccio, l'interazione palo-terreno è colta attraverso la definizione di coefficienti di Winkler (costanti elastiche e coefficienti di smorzamento) che possono essere caratterizzati da un comportamento lineare o non lineare. Nonostante l'approccio non lineare sia più adatto per modellare i fenomeni di interazione palo-terreno nel caso di eventi sismici di elevata intensità, gli approcci lineari sono spesso preferiti per diverse ragioni, la più importante delle quali è la possibilità di risolvere il problema nel dominio delle frequenze, dove la dipendenza dei fenomeni di interazione dalla frequenza può essere direttamente inclusa e dove i problemi di convergenza possono essere evitati. In questo contesto, la definizione di coefficienti di Winkler capaci di cogliere la rigidità dinamica del sistema palo-terreno e lo smorzamento geometrico, dipendente dalla frequenza, costituisce un importante aspetto, dato che questi influenzano significativamente sia la risposta cinematica che inerziale del sistema terreno-

fondazione (Mylonakis et al. 1997).

L'approccio lineare di trave su suolo alla Winkler è stato largamente usato per studiare la risposta di pali verticali soggetti ad azioni dinamiche. Per i pali verticali esistono soluzioni in forma chiusa ed espressioni semplificate per la stima delle rigidità dinamiche, la risposta cinematica ed i massimi momenti flettenti. Al contrario, l'applicazione del modello alla Winkler ai pali inclinati non è così diffusa in letteratura mentre sono più presenti soluzioni che adottano formulazioni agli elementi finiti o agli elementi di contorno (Gerolymos et al. 2008, Giannakou et al. 2010, Padrón et al. 2010, Padrón et al. 2015, Medina et al. 2014, Dezi et al. 2016).

Questo lavoro presenta un modello analitico per l'analisi delle sollecitazioni cinematiche che si sviluppano in pali inclinati soggetti alla propagazione di onde sismiche nel terreno. Il modello è basato su un approccio di trave su suolo elastico alla Winkler e la soluzione analitica del problema è derivata assumendo un comportamento lineare per i pali e per il terreno. Per il palo, avente un'inclinazione generica nello spazio, si utilizza il modello di trave di Eulero-Bernoulli e l'interazione palo-terreno è colta definendo impedenze del terreno attraverso espressioni disponibili in letteratura e relative alla dinamica di strati di materiale viscoelastico

soggetti alla vibrazione di dischi rigidi, in condizioni piane di deformazione. Il comportamento accoppiato assiale e flessionale del palo è descritto da un sistema di equazioni differenziali alle derivate totali, con le relative condizioni al contorno, che è risolto analiticamente sfruttando le matrici esponenziali. Alcune applicazioni dimostrano, dal confronto con risultati di letteratura ottenuti da formulazioni rigorose agli elementi di contorno, l'efficienza del modello proposto.

2 MODELLO ANALITICO

Questa sezione presenta la formulazione analitica del problema di un singolo palo di inclinazione generica infisso in un terreno omogeneo e soggetto agli spostamenti di terreno libero derivanti dalla propagazione di onde sismiche nel deposito.

2.1 Cinematica

Si considera un palo singolo di diametro ϕ e lunghezza L infisso con una generica inclinazione in un deposito di terreno omogeneo e si definisce un sistema di riferimento globale ortonormale $\{0, x, y, z\}$ avente l'origine in superficie del deposito e l'asse z orientato verso il basso (Figura 1). Si introduce quindi un sistema di riferimento locale $\{0, \xi, \eta, \zeta\}$ per il palo avente l'asse ζ passante per i baricentri delle sezioni trasversali del palo.

Con riferimento ai punti che giacciono sull'asse del palo, definita con ω la frequenza circolare, gli spostamenti a profondità z sono descritti dal vettore a valori complessi

$$\mathbf{u}_g(\omega; z) = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_h(\omega; z) \\ u_z(\omega; z) \end{bmatrix}_{3 \times 1} \quad (1)$$

dove il sotto-vettore \mathbf{u}_h raccoglie le componenti orizzontali nelle direzioni x e y . In maniera simile, il vettore che descrive il moto di terreno libero \mathbf{u}_{ff} , valutato in corrispondenza dell'asse del palo, è partizionato nel sotto-vettore $\mathbf{u}_{ff,h}$

$$\mathbf{u}_{ff}(\omega; z) = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_{ff,h}(\omega; z) \\ u_{ff,z}(\omega; z) \end{bmatrix}_{3 \times 1} \quad (2)$$

Sotto l'ipotesi che non si sviluppino gap tra il palo ed il terreno durante il moto, gli spostamenti del palo sono convenientemente espressi con la relazione

$$\mathbf{u}_l(\omega; \zeta) = \mathbf{R} \mathbf{u}_g(\omega; z) \quad (3)$$

dove \mathbf{R} è la matrice di rotazione che permette di esprimere gli spostamenti del palo nel sistema di riferimento locale a partire dagli spostamenti espressi nel sistema globale.

In accordo al modello di trave di Eulero-Bernoulli, il campo di spostamenti del generico punto della sezione trasversale del palo può essere ottenuto dalla

$$\mathbf{s}_l(\omega; \xi, \eta, \zeta) = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_l(\omega; \zeta) \\ u_\zeta(\omega; \zeta) - \mathbf{u}'_l(\omega; \zeta) \cdot \mathbf{a}(\xi, \eta) \end{bmatrix}_{3 \times 1} \quad (4)$$

dove l'apice denota le derivate rispetto a ζ e $\mathbf{a}(\xi, \eta)$ è il vettore delle coordinate locali ξ e η del generico punto della sezione trasversale. Il palo subisce solamente le deformazioni normali

$$\varepsilon_\zeta(\omega; \xi, \eta, \zeta) = u'_\zeta(\omega; \zeta) - \mathbf{u}'_l(\omega; \zeta) \cdot \mathbf{a}(\xi, \eta) \quad (5)$$

2.2 Il problema visco-elastico lineare

Il palo è costituito da un materiale visco-elastico caratterizzato da un modulo di Young E_p e fattore di smorzamento δ_p . Durante il moto il palo interagisce con il terreno circostante e le risultanti delle reazioni del terreno sono rappresentate da forze distribuite lungo il palo. Raggruppando le componenti orizzontali delle risultanti delle reazioni del terreno nel sotto-vettore \mathbf{r}_h , e definendo con r_z la componente verticale, il vettore delle forze di interazione terreno-palo risulta (Figura 1b)

$$\mathbf{r}(\omega; z) = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_h(\omega; z) \\ r_z(\omega; z) \end{bmatrix}_{3 \times 1} \quad (6)$$

Ipotizzando il terreno costituito da piani (strati orizzontali indefiniti di spessore infinitesimo) aventi un comportamento visco-elastico, le forze di interazione sono date dalla (Figura 1c)

$$\mathbf{r}(\omega; z) = \mathfrak{S}(\omega) [\mathbf{u}_{ff}(\omega; z) - \mathbf{u}_g(\omega; z)] \quad (7)$$

dove \mathfrak{S} è la matrice di impedenza 3×3 del generico piano di terreno. La matrice \mathfrak{S} può essere popolata considerando le formule proposte da Dobry et al. (1982), Gazetas e Dobry (1984) e Makris e Gazetas (1993). Le componenti della matrice \mathfrak{S} sono le forze necessarie ad indurre una vibrazione armonica unitaria ad un disco rigido posto a profondità z . La condizione di equilibrio del palo, espressa dal principio di Lagrange-D'Alembert che è opportunamente integrata per parti, fornisce

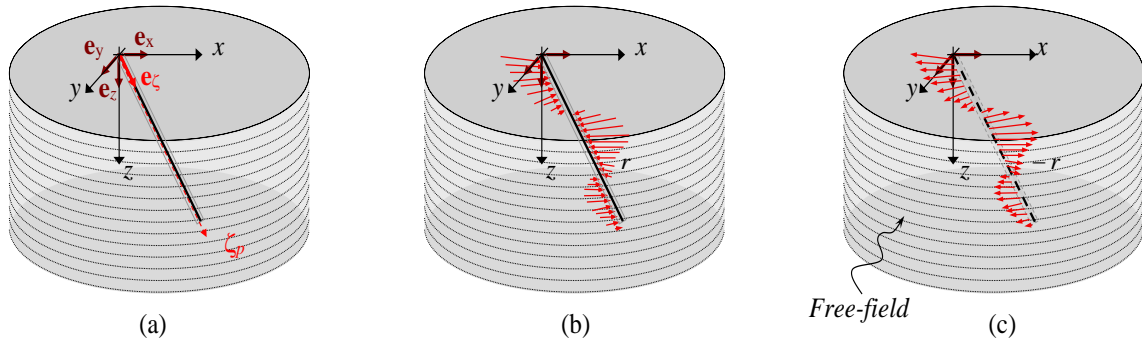


Figura 1. (a) Palo infisso nello strato omogeneo; (b) palo soggetto alle forze di interazione palo-terreno e (c) terreno soggetto alla propagazione delle onde sismiche nel terreno e alle forze di interazione palo-terreno.

$$\begin{aligned}
& E_p^* \left(\mathbf{J} \int_0^L \mathbf{u}_t''' \cdot \hat{\mathbf{u}}_t d\zeta - A \int_0^L u_\zeta'' \hat{u}_\zeta d\zeta \right) \\
& - \omega^2 \rho_p \left(A \int_0^L \mathbf{u}_t \cdot \hat{\mathbf{u}}_t d\zeta + A \int_0^L u_\zeta \hat{u}_\zeta d\zeta - \mathbf{J} \int_0^L \mathbf{u}_t'' \cdot \hat{\mathbf{u}}_t d\zeta \right) \\
& + \int_0^L (\mathbf{R} \mathfrak{I} \mathbf{R}^T \mathbf{u}_t \cdot \hat{\mathbf{u}}_t) c_{z\zeta} d\zeta - \int_0^L (\mathbf{R} \mathfrak{I} \mathbf{u}_{ff} \cdot \hat{\mathbf{u}}_t) c_{z\zeta} d\zeta \quad (8) \\
& + E_p^* (A u_\zeta' \hat{u}_\zeta + \mathbf{J} \mathbf{u}_t'' \cdot \hat{\mathbf{u}}_t - \mathbf{J} \mathbf{u}_t''' \cdot \hat{\mathbf{u}}_t) \Big|_0^L \\
& - \omega^2 \rho_p (\mathbf{J} \mathbf{u}_t' \cdot \hat{\mathbf{u}}_t) \Big|_0^L - (\mathbf{F}_t \cdot \hat{\mathbf{u}}_t + F_\zeta \hat{u}_\zeta + \mathbf{M}_t \cdot \hat{\mathbf{u}}_t) \Big|_0^L \\
& - (\mathbf{F}_t \cdot \hat{\mathbf{u}}_t + F_\zeta \hat{u}_\zeta + \mathbf{M}_t \cdot \hat{\mathbf{u}}_t) \Big|_L = 0 \quad \forall \hat{\mathbf{u}}_t \neq \mathbf{0}
\end{aligned}$$

dove \mathbf{J} ed A sono rispettivamente la matrice di inerzia e l'area della sezione trasversale del palo, mentre $E_p^* = E_p(1+2i\delta_p)$ è il modulo elastico complesso del materiale del palo in accordo al principio di corrispondenza (Makris 1997). Tenuto conto del teorema fondamentale del calcolo variazionale, dall'Equazione (8) sono derivate le equazioni di bilancio locale

$$\begin{aligned}
& E_p^* \mathbf{J} \mathbf{u}_t''' + \omega^2 \rho_p \mathbf{J} \mathbf{u}_t'' - \omega^2 \rho_p A \mathbf{u}_t \\
& + c_{z\zeta} \sum_{1,2}^{1,2} (\mathbf{R} \mathfrak{I} \mathbf{R}^T) \mathbf{u}_t + c_{z\zeta} \sum_{1,2}^3 (\mathbf{R} \mathfrak{I} \mathbf{R}^T) u_\zeta = \quad (9a)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& = c_{z\zeta} \sum_{1,2}^{1,2} (\mathbf{R} \mathfrak{I}) \mathbf{u}_{ff,h} + c_{z\zeta} \sum_{1,2}^3 (\mathbf{R} \mathfrak{I}) u_{ff,z} \\
& - E_p^* A u_\zeta'' - \omega^2 \rho_p A u_\zeta + c_{z\zeta} \sum_3^{1,2} (\mathbf{R} \mathfrak{I} \mathbf{R}^T) \mathbf{u}_t \\
& + c_{z\zeta} \sum_3^3 (\mathbf{R} \mathfrak{I} \mathbf{R}^T) u_\zeta = \quad (9b) \\
& = c_{z\zeta} \sum_3^{1,2} (\mathbf{R} \mathfrak{I}) \mathbf{u}_{ff,h} + c_{z\zeta} \sum_3^3 (\mathbf{R} \mathfrak{I}) u_{ff,z}
\end{aligned}$$

e le relative condizioni al contorno

$$\begin{aligned}
& (E_p^* A u_\zeta' + F_\zeta) \hat{u}_\zeta \Big|_0 = 0 \quad \forall \hat{u}_\zeta \\
& (E_p^* A u_\zeta' - F_\zeta) \hat{u}_\zeta \Big|_L = 0 \quad \forall \hat{u}_\zeta \\
& (E_p^* \mathbf{J} \mathbf{u}_t''' + \omega^2 \rho_p \mathbf{J} \mathbf{u}_t'' - \mathbf{F}_t) \cdot \hat{\mathbf{u}}_t \Big|_0 = 0 \quad \forall \hat{\mathbf{u}}_t \\
& (E_p^* \mathbf{J} \mathbf{u}_t''' + \omega^2 \rho_p \mathbf{J} \mathbf{u}_t'' + \mathbf{F}_t) \cdot \hat{\mathbf{u}}_t \Big|_L = 0 \quad \forall \hat{\mathbf{u}}_t \\
& (E_p^* \mathbf{J} \mathbf{u}_t'' + \mathbf{M}_t) \cdot \hat{\mathbf{u}}_t \Big|_0 = 0 \quad \forall \hat{\mathbf{u}}_t \\
& (E_p^* \mathbf{J} \mathbf{u}_t'' - \mathbf{M}_t) \cdot \hat{\mathbf{u}}_t \Big|_L = 0 \quad \forall \hat{\mathbf{u}}_t
\end{aligned} \quad (10)$$

Nelle Equazioni (9), $\sum_{i,j}^{l,m} \mathbf{A}$ indica segmenti della

generica matrice \mathbf{A} costituiti dal sottoinsieme di righe comprese tra i e j ed il sottoinsieme di colonne comprese tra l ed m . Le Equazioni (9) rappresentano un sistema di equazioni differenziali ordinarie a coefficienti costanti le cui incognite sono funzioni complesse $\mathbf{u}_t(\zeta)$ che soddisfano le condizioni al contorno (10) di natura statica e cinematica. Al fine di fornire una soluzione analitica del sistema (9) si definisce il seguente vettore delle funzioni incognite, che include anche le derivate di ordine superiore:

$$\mathbf{x}(\omega; \zeta) = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_t \\ u_\zeta \\ \mathbf{u}_t' \\ u_\zeta' \\ \mathbf{u}_t'' \\ u_\zeta'' \end{bmatrix}_{10 \times 1} \quad (11)$$

Il sistema (9), con le relative condizioni al contorno (10), possono quindi riscriversi nella forma canonica

$$\mathbf{x}' - \mathbf{B}(\omega)\mathbf{x} = \mathbf{c}(\omega; \zeta) \quad (12)$$

$$\left[\mathbf{D}(\omega)\mathbf{x} + \mathbf{P}(\omega) \right] \cdot \mathbf{S}_{1,5} \hat{\mathbf{x}} \Big|_0 = \mathbf{0} \quad \forall \hat{\mathbf{x}} \quad (13)$$

$$\left[\mathbf{D}(\omega)\mathbf{x} - \mathbf{P}(\omega) \right] \cdot \mathbf{S}_{1,5} \hat{\mathbf{x}} \Big|_L = \mathbf{0} \quad \forall \hat{\mathbf{x}}$$

dove \mathbf{B} e \mathbf{D} (Appendice I) sono matrici complesse che dipendono dalle proprietà meccaniche ed inerziali della sezione del palo e dall'impedenza degli strati di terreno, mentre

$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ -\frac{1}{E_p^* A} \left(c_{z\zeta} \mathbf{S}_{1,2}^{1,2}(\mathbf{R}\mathfrak{I}) \mathbf{u}_{ff,h} + c_{z\zeta} \mathbf{S}_{1,2}^3(\mathbf{R}\mathfrak{I}) u_{ff,z} \right) \\ \mathbf{0} \\ \frac{1}{E_p^*} \mathbf{J}^{-1} \left(c_{z\zeta} \mathbf{S}_{1,2}^{1,2}(\mathbf{R}\mathfrak{I}) \mathbf{u}_{ff,h} + c_{z\zeta} \mathbf{S}_{1,2}^3(\mathbf{R}\mathfrak{I}) u_{ff,z} \right) \end{bmatrix} \quad (14)$$

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_t \\ F_\zeta \\ \mathbf{M}_t \end{bmatrix} \quad (15)$$

sono vettori che dipendono rispettivamente dalle forze distribuite di interazione terreno-palo e dai carichi concentrati alle estremità del palo.

L'Equazione (12) costituisce un sistema lineare di equazioni differenziali ordinarie a coefficienti costanti la cui soluzione è ottenuta sommando la soluzione del sistema omogeneo associato ed una soluzione particolare che dipende dai carichi esterni. Si può dimostrare che tale soluzione può essere scritta nella forma

$$\mathbf{x} = \mathbf{E}(\omega; \zeta) \mathbf{g}(\omega) + \mathbf{E}(\omega; \zeta) \int \mathbf{E}^{-1}(\omega; \zeta) \mathbf{c} d\zeta \quad (16)$$

dove \mathbf{E} è la matrice esponenziale definita attraverso lo sviluppo in serie

$$\mathbf{E}(\omega; \zeta) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \mathbf{B}^k(\omega) \zeta^k \quad (17)$$

e \mathbf{g} è il vettore delle costanti di integrazione che deve essere calcolato a partire dalle condizioni al contorno (13). L'Equazione (16) è di validità generale e la valutazione della soluzione particolare richiede che sia nota l'espressione del moto del terreno in condizioni di campo libero; in questo lavoro gli spostamenti di campo libero sono calcolati considerando il problema della propagazione monodimensionale di onde di taglio

e di pressione nella direzione verticale. Gli spostamenti di terreno libero sono definiti dalle espressioni

$$\mathbf{u}_{ff,h}(\omega; z) = \mathbf{q}_h(\omega) e^{ik_h z} + \mathbf{t}_h(\omega) e^{-ik_h z} \quad (18)$$

$$u_{ff,z}(\omega; z) = q_z(\omega) e^{ik_z z} + t_z(\omega) e^{-ik_z z} \quad (19)$$

dove

$$k_h = \sqrt{\frac{\omega^2}{V_s^2(1+2i\delta_s)}} \quad k_z = \sqrt{\frac{\omega^2}{V_{La}^2(1+2i\delta_s)}} \quad (20a,b)$$

sono i numeri d'onda complessi associati rispettivamente alla propagazione di onde di taglio e di pressione, e \mathbf{q}_h , \mathbf{t}_h , q_z e t_z sono costanti di integrazione che dipendono dalle condizioni al contorno (Kramer 1996). Tenendo conto dell'Equazione (16)

$$\mathbf{c} = \mathbf{Q}_h(\omega) e^{ik_h c_{z\zeta}} + \mathbf{T}_h(\omega) e^{-ik_h c_{z\zeta}} + \mathbf{Q}_z(\omega) e^{ik_z c_{z\zeta}} + \mathbf{T}_z(\omega) e^{-ik_z c_{z\zeta}} \quad (21)$$

dove

$$\mathbf{Q}_h(\omega) = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ -\frac{c_{z\zeta}}{E_p^* A} \mathbf{S}_{1,2}^{1,2}(\mathbf{R}\mathfrak{I}) \mathbf{q}_h \\ \mathbf{0} \\ \frac{c_{z\zeta}}{E_p^*} \mathbf{J}^{-1} \mathbf{S}_{1,2}^{1,2}(\mathbf{R}\mathfrak{I}) \mathbf{q}_h \end{bmatrix} \quad (22a)$$

$$\mathbf{T}_h(\omega) = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ -\frac{c_{z\zeta}}{E_p^* A} \mathbf{S}_{1,2}^{1,2}(\mathbf{R}\mathfrak{I}) \mathbf{t}_h \\ \mathbf{0} \\ \frac{c_{z\zeta}}{E_p^*} \mathbf{J}^{-1} \mathbf{S}_{1,2}^{1,2}(\mathbf{R}\mathfrak{I}) \mathbf{t}_h \end{bmatrix} \quad (22b)$$

$$\mathbf{Q}_z(\omega) = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ -\frac{c_{z\zeta}}{E_p^* A} \mathbf{S}_{1,2}^3(\mathbf{R}\mathfrak{I}) q_z \\ \mathbf{0} \\ \frac{c_{z\zeta}}{E_p^*} \mathbf{J}^{-1} \mathbf{S}_{1,2}^3(\mathbf{R}\mathfrak{I}) q_z \end{bmatrix} \quad (23a)$$

$$\mathbf{T}_z(\omega) = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ 0 \\ \mathbf{0} \\ -\frac{c_{z\zeta}}{E_p^* A} \sum_3 (\mathbf{R}\mathfrak{S}) t_z \\ \mathbf{0} \\ \frac{c_{z\zeta}}{E_p^*} \mathbf{J}^{-1} \sum_{1,2}^3 (\mathbf{R}\mathfrak{S}) t_z \end{bmatrix} \quad (23b)$$

Sostituendo l'Equazione (21) nella (16) si ottiene

$$\mathbf{x} = \mathbf{E}\mathbf{g}_f + \mathbf{E} \int \mathbf{E}^{-1} \left(\mathbf{Q}_h e^{ik_h c_{z\zeta} \zeta} + \mathbf{T}_h e^{-ik_h c_{z\zeta} \zeta} + \mathbf{Q}_z e^{ik_z c_{z\zeta} \zeta} + \mathbf{T}_z e^{-ik_z c_{z\zeta} \zeta} \right) d\zeta \quad (24)$$

che, per le proprietà delle matrici esponenziali, può essere riscritta nella forma

$$\mathbf{x} = \mathbf{E}\mathbf{g}_f + \tilde{\mathbf{x}}_h + \tilde{\mathbf{x}}_z \quad (25)$$

dove

$$\tilde{\mathbf{x}}_h = \mathbf{E} \left[\left(ik_h c_{z\zeta} \mathbf{I} - \mathbf{B} \right)^{-1} \mathbf{E}^{-1} \mathbf{Q}_h e^{ik_h c_{z\zeta} \zeta} - \left(ik_h c_{z\zeta} \mathbf{I} + \mathbf{B} \right)^{-1} \mathbf{E}^{-1} \mathbf{T}_h e^{-ik_h c_{z\zeta} \zeta} \right] \quad (26)$$

$$\tilde{\mathbf{x}}_z = \mathbf{E} \left[\left(ik_z c_{z\zeta} \mathbf{I} - \mathbf{B} \right)^{-1} \mathbf{E}^{-1} \mathbf{Q}_z e^{ik_z c_{z\zeta} \zeta} - \left(ik_z c_{z\zeta} \mathbf{I} + \mathbf{B} \right)^{-1} \mathbf{E}^{-1} \mathbf{T}_z e^{-ik_z c_{z\zeta} \zeta} \right] \quad (27)$$

sono le soluzioni particolari associate rispettivamente alla propagazione monodimensionale di onde di taglio e di pressione nella direzione verticale.

Differentemente dai metodi numerici classici, come il metodo agli elementi finiti e delle differenze finite, questo approccio permette di esprimere la soluzione del problema in forma analitica; nel caso di un deposito di terreno omogeneo la discretizzazione dell'asse del palo non è necessaria per ottenere una accurata soluzione numerica.

Una volta determinata la soluzione, le sollecitazioni nel palo possono essere ottenute dall'espressione

$$\begin{bmatrix} N(\omega; \zeta) \\ M_\eta(\omega; \zeta) \\ M_\xi(\omega; \zeta) \\ V_\xi(\omega; \zeta) \\ V_\eta(\omega; \zeta) \end{bmatrix} = \mathbf{K}(\omega) \sum_{4,10}^1 \mathbf{x}(\omega; \zeta) \quad (28)$$

con \mathbf{K} riportata nell'Appendice I.

3 APPLICATIONS

In questa sezione si presentano alcune applicazioni al fine di mostrare le potenzialità del modello proposto nel cogliere le sollecitazioni prodotte in pali inclinati dalla propagazione di onde sismiche nel terreno. Per questo scopo, si considerano come benchmark alcuni dei risultati disponibili in Padron et al. (2015), ottenuti con un modello agli elementi di contorno. I parametri meccanici e geometrici considerati (in forma adimensionale) sono riportati nella Figura 2a; le applicazioni sono eseguite considerando pali di lunghezza 12 m aventi differenti inclinazioni ($\theta = 0^\circ, 10^\circ, 20^\circ, 30^\circ$), infissi in depositi omogenei di terreno caratterizzati da due differenti velocità delle onde di taglio ($V_s = 250$ e 110 m/s). Il modulo di Young e la densità del materiale del palo sono rispettivamente $E_p = 30000$ MPa e $\rho_p = 2.5$ t/m³ (si considerano pali in calcestruzzo).

L'azione sismica in superficie del deposito è costituita da un accelerogramma artificiale con accelerazione di picco al suolo $a_g = 0.375g$, compatibile con lo spettro di risposta elastico per un terreno di tipo C e fattore di smorzamento 5% (Figura 2b). L'azione sismica è applicata nella direzione x (Figura 2a). Per queste applicazioni il palo non è stato discretizzato ed è stata assunta per le onde di pressione sull'intero deposito la velocità analoga di Lysmer.

La Figura 3 mostra gli involuipi dei valori assoluti delle forze di taglio e dei momenti flettenti che si sviluppano lungo il palo come conseguenza dell'interazione cinematica.

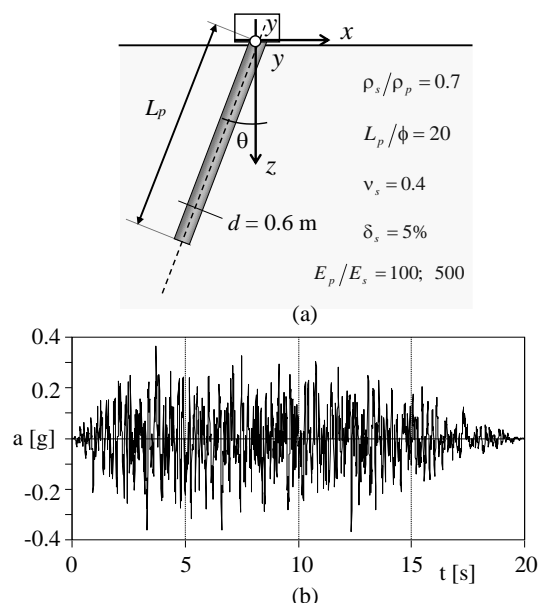


Figura 2. (a) Geometria del palo e (b) input sismico.

I risultati ottenuti considerando diverse inclinazioni del palo sono riportati con curve di colore diverso per entrambi i depositi investigati, caratterizzati da rapporti tra i moduli di Young del palo e del terreno $E_p/E_s = 100$ ($V_s = 250$ m/s) e $E_p/E_s = 500$ ($V_s = 110$ m/s). Tenuto conto dello scopo delle applicazioni, ovvero la validazione del modello proposto, l'azione sismica definita per il terreno di categoria C è stata adottata per entrambe le tipologie di deposito.

Inoltre, i risultati di riferimento (benchmark) sono riportati con simboli mentre, consistentemente con l'approccio adottato, i risultati ottenuti con il modello proposto sono riportati con linee continue. Per entrambi i terreni, le forze di taglio di riferimento sono ben riprodotte, indipendentemente dall'angolo di inclinazione del palo. Tuttavia, con riferimento al rapporto tra i moduli di Young del palo e del terreno $E_p/E_s = 100$, si osservano significative differenze in prossimità della testa e alla punta del palo; in particolare, le forze di taglio di riferimento (benchmark) sono maggiori di quelle valutate con l'approccio proposto in corrispondenza della testa del palo e leggermente minori in prossimità della punta.

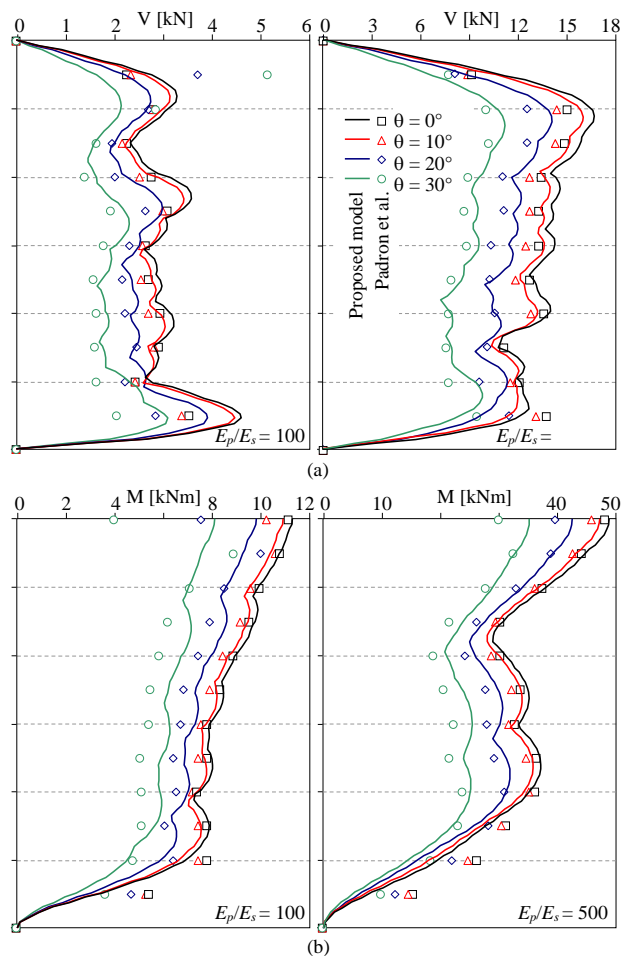


Figura 3. Involuppo dei massimi assoluti delle (a) forze di taglio e (b) dei momenti flettenti lungo il palo.

Le incoerenze locali in prossimità della testa del palo sono probabilmente imputabili alle impedenze locali utilizzate per simulare l'interazione terreno-palo, basate sull'ipotesi di deformazione piana dello strato infinitesimo di terreno, che non risultano capaci di cogliere la dinamica degli strati superficiali di terreno, caratterizzati da un ridotto grado di confinamento e dalla propagazione di onde di superficie. Queste considerazioni sono confermate dai risultati ottenuti nel caso di $E_p/E_s = 500$, ovvero nel caso di un deposito di terreno più deformabile, nel qual caso le forze di taglio che si sviluppano in prossimità della testa del palo sono più simili a quelle ottenute con il modello agli elementi di contorno.

Relativamente ai momenti flettenti, i risultati di riferimento (benchmark) sono ben riprodotti per entrambe le condizioni di suolo ($E_p/E_s = 100, 500$), ad eccezione di piccole differenze locali in prossimità della testa del palo dove i momenti flettenti ottenuti dal modello agli elementi di contorno tendono a diminuire, probabilmente in conseguenza del minor confinamento esercitato dagli strati superficiali di terreno. Come già detto, questi effetti non sono colti dal modello proposto a meno che non si implementino differenti impedenze locali per simulare l'interazione terreno-palo, opportunamente calibrate per cogliere questi fenomeni.

Come atteso, le differenze tra i dati di riferimento (benchmark) ed i risultati ottenuti con il modello proposto si riducono per terreni più soffici ($E_p/E_s = 500$). Gli andamenti dei momenti flettenti in testa sono consistenti con quelli delle forze di taglio.

La Figura 4 mostra gli involuppi delle massime e minime forze assiali lungo i pali, ottenuti dalle diverse applicazioni.

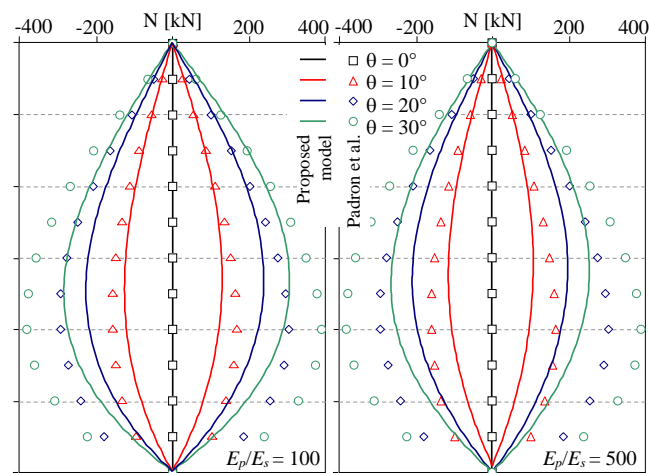


Figura 4. Involuppo delle massime e minime forze assiali lungo il palo.

Le maggiori differenze tra i valori di riferimento e quelli ottenuti con il modello proposto sono principalmente osservate, per entrambe le tipologie di terreno ($E_p/E_s = 100, 500$), nella metà inferiore del palo.

Da un punto di vista generale, le forze di taglio ed i momenti flettenti dovuti alla propagazione delle onde sismiche nel terreno si riducono al crescere dell'angolo di inclinazione del palo, indipendentemente dalla rigidità del terreno, mentre, come atteso, le forze assiali crescono.

4 CONCLUSIONI

In questo lavoro è stato presentato un modello analitico basato su un approccio alla Winkler in campo dinamico per la valutazione delle sollecitazioni cinematiche in pali inclinati soggetti

alla propagazione delle onde sismiche nel terreno.

Il palo è modellato con una trave di Eulero-Bernoulli avente una generica inclinazione nello spazio e l'interazione terreno-palo è colta sfruttando soluzioni elastodinamiche disponibili in letteratura relative alla vibrazione di dischi rigidi in piani viscoelastici. Il problema accoppiato assiale e flessionale del palo soggetto agli spostamenti del terreno durante eventi sismici è stato risolto analiticamente sfruttando le matrici esponenziali; questo ha permesso di fornire le espressioni analitiche delle sollecitazioni agenti lungo il palo. Il modello è caratterizzato da un onere computazionale molto minore rispetto a quello tipico di approcci agli elementi finiti o agli elementi di contorno.

Sono state eseguite alcune applicazioni confrontando i risultati ottenuti con il modello proposto con quelli disponibili in letteratura, derivanti da formulazioni rigorose agli elementi di contorno. I risultati dimostrano che il modello proposto è capace, quale che sia l'inclinazione del palo, di cogliere le forze di taglio ed i momenti flettenti che si sviluppano a seguito dell'interazione cinematica con il terreno durante un evento sismico (si osservano errori medi di circa il 10% rispetto ai risultati di modellazioni agli elementi di contorno). Tuttavia, alcune inconsistenze locali tra i risultati del modello

proposto e quelli di riferimento sono state osservate alla testa del palo: queste possono essere imputate alle funzioni elastodinamiche adottate per definire l'impedenza terreno-palo (i.e. l'interazione del palo con il terreno). Per quanto riguarda le forze assiali, sono state osservate, per tutte le condizioni di terreno indagate, maggiori differenza tra i risultati del modello proposto e quelli di riferimento (comprese nel range del 25÷30%); queste sono principalmente concentrate nella metà inferiore del palo.

REFERENCES

- Dezi, F., Carbonari, S., Morici, M., 2016. A Numerical Model for the Dynamic Analysis of Inclined Pile Groups. *Earthquake Engng Struct. Dynamics*, **45**(1), 45–68.
- Dobry, R., Vicente, E., O'Rourke, M.J., Roesset, J.M., 1982. Horizontal Stiffness and Damping of Single Piles. *Journal of Geotechnical Engineering Division, ASCE*, **108**(GT3), 439–459.
- Gazetas, G., Dobry, R., 1984. Single radiation damping model for piles and footings. *J. Engng. Mech., ASCE*, **110**(6), 937–956.
- Gerolymos, N., Giannakou, A., Anastasopoulos, I., Gazetas, G., 2008. Evidence of beneficial role of inclined piles: observations and summary of numerical analyses. *Bulletin of Earthquake Engineering*, **6**(4), 705–722.
- Giannakou, A., Gerolymos, N., Gazetas, G., Tazoh, T., Anastasopoulos, I., 2010. Seismic Behavior of Batter Piles: Elastic Response. *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering*, **136**, 1187–1199.
- Kramer, S.L., 1996. *Geotechnical Earthquake Engineering*. Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ.
- Makris, N., Gazetas, G., 1993. Displacement phase differences in a harmonically oscillating pile. *Geotechnique*, **43**(1), 135–150.
- Makris, N., 1997. Causal hysteretic element. *Journal of Engineering Mechanics, ASCE*, **123**(11): 1209–1214.
- Medina C., Padrón, L.A., Aznárez, J.J., Santana, A., Maeso, O., 2014. Kinematic interaction factors of deep foundations with inclined piles. *Earthquake Engng. Struct. Dynamics*, **43**(13), 2035–2050.
- Mylonakis, G., Nikolaou, A., Gazetas, G., 1997. Soil–pile–bridge interaction: kinematic and inertial effects. Part I: soft soil. *Earthquake Engng Struct. Dynamics*, **26**(3), 337–359.
- Padrón, L.A., Aznárez, J.J., Maeso, O., Santana, A., 2010. Dynamic stiffness of deep foundations with inclined piles. *Earthquake Engng Struct. Dynamics*, **39**(12), 1343–1367.
- Padrón, L.A., Suárez, A., Aznárez, J.J., Maeso, O., 2015. Kinematic internal forces in deep foundations with inclined piles. *Earthquake Engng. Struct. Dynamics*, **44**(12), 2129–2135.

APPENDIX I

$$\mathbf{K} = E_p^* \frac{\pi \phi^4}{64} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{16}{\phi^2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -\omega^2 \frac{\rho_p}{E_p^*} & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -\omega^2 \frac{\rho_p}{E_p^*} & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (\text{A1})$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I}_2 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 0 & \mathbf{0} & 1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I}_2 & \mathbf{0} \\ \frac{c_{z\zeta}}{E_p^* A} \mathbf{S}_{1,2}(\mathbf{R}\mathfrak{I}\mathbf{R}^T) & \frac{c_{z\zeta}}{E_p^* A} \mathbf{S}_{3,3}(\mathbf{R}\mathfrak{I}\mathbf{R}^T) - \frac{\omega^2 \rho_p}{E_p^*} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I}_2 \\ \frac{\omega^2 \rho_p}{E_p^*} \mathbf{A}\mathbf{J}^{-1} - \frac{c_{z\zeta}}{E_p^*} \mathbf{J}^{-1} \mathbf{S}_{1,2}(\mathbf{R}\mathfrak{I}\mathbf{R}^T) & -\frac{c_{z\zeta}}{E_p^*} \mathbf{J}^{-1} \mathbf{S}_{3,3}(\mathbf{R}\mathfrak{I}\mathbf{R}^T) & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\frac{\omega^2 \rho_p}{E_p^*} \mathbf{I}_2 & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (\text{A2})$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & 0 & -\omega^2 \rho_p \mathbf{J} & 0 & \mathbf{0} & -E_p^* \mathbf{J} \\ \mathbf{0} & 0 & \mathbf{0} & E_p^* A & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 0 & \mathbf{0} & 0 & E_p^* \mathbf{J} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (\text{A3})$$